

SEGMENTATION D'IMAGES HYPERSPECTRALES À PARTIR D'ESTIMATION À NOYAU FONCTIONNEL DE LA DENSITÉ

Laurent Delsol ^{a,1} & Cécile Louchet ^{a,2}

^a*MAPMO, Université d'Orléans, UFR Sciences Bâtiment de mathématiques
Rue de Chartres B.P. 6759 - 45067 Orléans cedex 2 FRANCE.*

¹*laurent.delsol@univ-orleans.fr*, ²*cecile.louchet@univ-orleans.fr*

Résumé. Décomposer une image en un ensemble de régions homogènes est un problème classique, appelé segmentation, en traitement d'image. La détection de telles régions est habituellement une manière pertinente d'identifier des éléments spécifiques de la scène. De nombreuses méthodes ont été proposées pour segmenter des images en niveaux de gris ou multispectrales. L'approche du maximum a posteriori, utilisant un champ de Potts comme a priori et une estimation de la densité sur chaque région, constitue un exemple intéressant d'utilisation de la statistique bayésienne dans ce domaine. D'autre part, de nombreuses méthodes de statistique fonctionnelle sont maintenant proposées pour permettre l'étude de données correspondant à des courbes. L'estimateur à noyau de la densité a notamment été adapté à de telles données. Nous considérons dans cet exposé des images hyperspectrales pour lesquelles chaque pixel est décrit au travers d'une courbe (discretisée en un grand nombre de points) et discutons la manière dont l'estimation à noyau fonctionnel de la densité et l'approche par maximum a posteriori peuvent être combinées.

Mots-clés. Données fonctionnelles, image hyperspectrale, segmentation, lissage à noyau, densité, statistique bayésienne, maximum a posteriori

Abstract. Splitting a picture into a set of homogenous regions is a common problem, called segmentation, in image analysis. The detection of such regions is usually a relevant way to identify specific parts of the scene. Various methods have been proposed to segment gray-level or multispectral images. The maximum a posteriori approach, based on Potts random field as prior and density estimation on each region, is an interesting use of Bayesian statistics in that domain. On the other hand, a great variety of functional statistical methods are nowadays available to deal with data sets of curves. The kernel density estimator has been adapted to such data. In this talk we focus on hyperspectral images for which each pixel is described through a curve (discretized on a thin grid) and discuss the way functional kernel density estimation and maximum a posteriori approach may be combined.

Keywords. Functional data, hyperspectral image, segmentation, kernel smoothing, density, Bayesian statistics, maximum a posteriori.

1 Introduction

Une image consiste en l'observation, en chaque pixel $s \in S$, d'un descripteur y_s à valeurs dans \mathcal{E} qui peut être interprété comme la réalisation d'un champ aléatoire $\mathcal{Y} = \{\mathcal{Y}_s, s \in S\}$. La nature de S et de \mathcal{E} dépend du type d'image étudiée. Dans le cadre de cet exposé, nous considérons que $S \subset \mathbb{Z}^2$ (mais il est possible d'étendre la méthode proposée à des situations où S est plus complexe: graphes, images 3D, ...). D'autre part, y_s peut prendre ses valeurs soit dans $\{0, 1, \dots, k - 1\}$ dans le cas d'une image de type cartoon, dans \mathbb{R} lorsqu'il s'agit d'une image en niveaux de gris ou bien dans \mathbb{R}^p s'il est question d'une image couleur (ou plus généralement multispectrale).

Nous considérons dans cet exposé des images de nature hyperspectrale pour lesquelles y_s correspond à un vecteur de grande dimension correspondant aux valeurs discrétisées d'une fonction. Il est alors pertinent d'identifier y_s à une courbe dont on pourra prendre en compte la dynamique, la structure et la régularité. Nous supposons alors que y_s est à valeurs dans un espace fonctionnel \mathcal{E} muni d'une semi-métrie d . Prenons un exemple afin d'illustrer notre propos. Chaque pixel de l'image ci-dessous (disponible à l'url www.cs.columbia.edu/CAVE/databases/multispectral/real_and_fake) est décrit au travers de 31 mesures de réflectance correspondant à des longueurs d'onde allant de 400 à 700 nm (avec un pas de 10 nm).

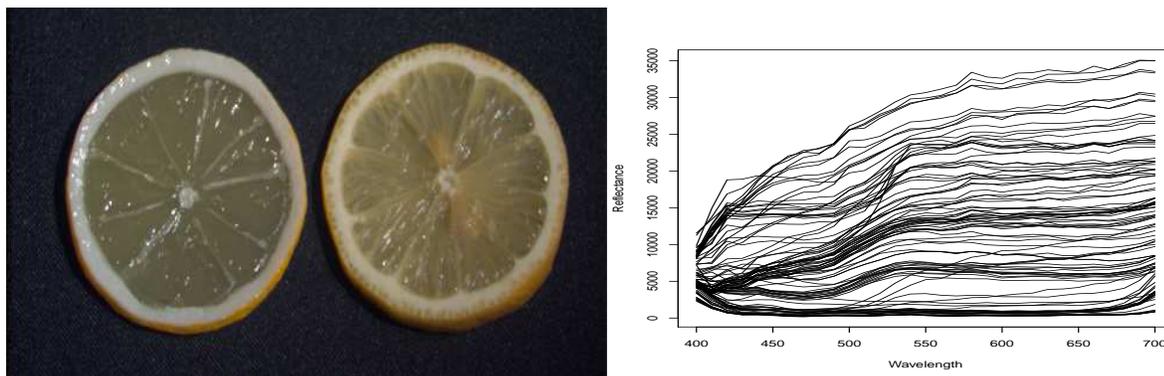


Figure 1: a) Fausse et véritable tranches de citron. b) Échantillon de 100 courbes de réflectance.

Nous montrons dans la suite de ce résumé comment l'approche par maximum a posteriori, couramment utilisée pour segmenter des images en niveaux de gris ou multispectrales peut être adaptée de manière intéressante aux données hyperspectrales au travers de l'utilisation d'estimateurs à noyau de la densité sur chacune des régions. La démarche usuelle de segmentation par maximum a posteriori est décrite en Section 2, l'estimateur à noyau de la densité est ensuite présenté en Section 3, tandis que la Section 4 est consacrée à la mise en pratique de notre méthode de segmentation d'images hyperspectrales.

2 Segmentation d'image “classique”

2.1 Problème de segmentation

La segmentation d'une image consiste à décomposer l'image initiale \mathcal{Y} en différentes régions (c'est à dire groupes de pixels) sur lesquelles les pixels partagent les mêmes caractéristiques. Ces régions ont habituellement une signification concrète et correspondent à des éléments spécifiques de la scène que l'on cherche à identifier (par exemple fond, pulpe, écorce dans l'image Fig 1.a)). On trouve dans la littérature différentes manières d'attaquer ce problème (voir par exemple Mumford et Sha, 1989, Maître, 2003 ou Aubert et Kornprobst, 2006 et les références qu'ils contiennent).

2.2 Maximum a posteriori

La statistique Bayésienne constitue un outil intéressant en traitement d'image (voir par exemple le travail précurseur de Besag, 1989). La méthode de segmentation par maximum a posteriori que nous allons maintenant décrire est une méthode de segmentation par détection de régions. Le principe est de déterminer l'image segmentée \mathcal{X} la plus vraisemblable conditionnellement à l'observation y de l'image originale \mathcal{Y} . Cela revient donc à trouver

$$x_{MAP} = \operatorname{argmax}_x \mathbb{P}(\mathcal{X} = x | \mathcal{Y} = y).$$

Une application directe de la formule de Bayes nous donne

$$\mathbb{P}(\mathcal{X} = x | \mathcal{Y} = y) \propto f_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}=x}(y) \mathbb{P}(\mathcal{X} = x).$$

Ainsi, trouver la segmentation la plus vraisemblable revient à résoudre le problème de maximisation suivant

$$x_{MAP} = \operatorname{argmax}_x f_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}=x}(y) \mathbb{P}(\mathcal{X} = x).$$

Cette nouvelle formulation du problème est intéressante. Elle fait intervenir la loi de \mathcal{X} sur laquelle on pourra mettre un a priori (cela revient à faire une hypothèse sur la nature de la segmentation que l'on recherche) et la densité conditionnelle de \mathcal{Y} sachant $\mathcal{X} = x$ que l'on pourra (sous certaines conditions données ci-dessous) exprimer assez simplement.

Afin de simplifier l'expression de la densité de \mathcal{Y} sachant \mathcal{X} , nous faisons les hypothèses

$$(\mathcal{Y}_s, s \in S) \text{ sont indépendants conditionnellement à } \mathcal{X}. \quad (1)$$

$$\forall s \in S, \mathcal{L}(\mathcal{Y}_s | \mathcal{X}) = \mathcal{L}(\mathcal{Y}_s | \mathcal{X}_s). \quad (2)$$

Nous obtenons alors

$$f_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}=x}(y) = \prod_{s \in S} f_{\mathcal{Y}_s|\mathcal{X}_s=x_s}(y_s) =: \prod_{s \in S} \psi_{x_s}(y_s).$$

Il nous reste maintenant à décrire la distribution a priori que nous considérons pour \mathcal{X} . Il est raisonnable de souhaiter que \mathcal{X} prenne un nombre fini de valeurs, correspondant aux labels des régions (par exemple $\{0, 1, \dots, k-1\}$ si on segmente en k régions), et qu'il présente une certaine régularité spatiale. Afin de prendre compte les interactions entre pixels, nous associons à chaque pixel $s \in S$ un ensemble V_s de pixels voisins (ne contenant pas s). La relation de voisinage est supposée symétrique et nous rappelons qu'une clique est un ensemble de pixels tous voisins les uns des autres (on note \mathcal{C} l'ensemble des cliques ainsi définies sur l'ensemble de l'image).

La distribution d'un champs de Gibbs (à valeurs dans \mathcal{M}) dépend directement de l'énergie $U(x) = \sum_{c \in \mathcal{C}} U_c(x)$ associée à l'ensemble des cliques et s'exprime de la manière suivante:

$$\mathbb{P}(\mathcal{X} = x) = \frac{e^{-U(x)}}{Z}, \text{ avec } Z = \sum_{y \in \mathcal{M}^S} e^{-U(y)}$$

Un exemple intéressant est le champ de Potts qui prend un nombre fini de valeurs (e.g. $\{0, 1, \dots, k-1\}$) et dont l'énergie est donnée par

$$U_P(x) = -B \sum_{s \in S} x_s + \beta \sum_{c = \{s, t\} \in \mathcal{C}} 1_{\{x_s \neq x_t\}}.$$

Le paramètre B agit sur la nature des régions que l'on a tendance à trouver majoritaires tandis que β contrôle la régularité du champ. Cette distribution répondant à nos attentes, nous l'utilisons comme a priori.

Il nous est enfin possible de montrer que la loi a posteriori de \mathcal{X} sachant $\mathcal{Y} = y$ est une mesure de Gibbs associée à l'énergie

$$U_S(x|y) = - \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\substack{s \in S \\ x_s = j}} \ln(\psi_j(y_s)) - B \sum_{s \in S} x_s + \beta \sum_{c = \{s, t\} \in \mathcal{C}} 1_{\{x_s \neq x_t\}}.$$

2.3 Algorithme I.C.M.

La mise en pratique de la méthode de segmentation décrite dans le paragraphe précédent nécessite de trouver une manière de déterminer la configuration x_{MAP} la plus vraisemblable du champ de Gibbs \mathcal{X} conditionnellement à \mathcal{Y} . Lorsque les densités ψ_j sont connues, ceci peut être fait à l'aide d'un algorithme de recuit simulé qui construit une suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de segmentations qui converge vers x_{MAP} (quelle que soit l'initialisation x^0 utilisée). La lenteur du recuit simulé amène souvent à utiliser un algorithme de type I.C.M. (Iterated Conditional Mode), qui a l'avantage d'être beaucoup plus rapide mais converge seulement vers un maximum local a posteriori (le choix de x^0 peut donc s'avérer important). Il reste à tenir compte du fait que les densités correspondant aux différentes régions sont

inconnues et doivent être estimées, ce qui amène à considérer l'algorithme de type I.C.M. détaillé ci-dessous.

Algorithme I.C.M.

Initialisation

- des estimations des densités: $(\hat{\psi}_j^0)_{j \in \{0, \dots, k-1\}}$,
- de la suite de segmentations: x^0 .

Itérer la procédure suivante:

À l'étape $p \geq 1$

Initialiser $x^p = x^{p-1}$.

Pour chaque pixel $s \in S$ (parcourir successivement tous les pixels de l'image)

- **calculer l'énergie conditionnelle locale** à partir de y , $(\hat{\psi}_j^{p-1})_{j \in \{1, \dots, k-1\}}$ et x^{p-1} ,
- **changer x_s^p en la valeur la plus vraisemblable** (i.e. qui minimise l'énergie conditionnelle locale).

Mettre à jour les estimations des densités: $(\hat{\psi}_j^p)_{j \in \{1, \dots, k-1\}}$ à partir de y et x^p .

S'arrêter dès que $x^p = x^{p-1}$ ou $p > N_{max}$.

3 Estimateur à noyau fonctionnel de la densité

Suite au travail précurseur de Ferraty et Vieu (2000) concernant l'estimation de l'opérateur de régression sur variable fonctionnelle, de nombreux estimateurs à noyau ont été adaptés au cas de données fonctionnelles (voir par exemple Ferraty et Vieu, 2006, ou Ferraty et Romain, 2011). C'est notamment le cas de l'estimateur de la densité (par rapport à une mesure de référence μ) introduit par Dabo-Niang (2002) sous la forme

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{nR_y(h, d, \mu)} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{d(\mathcal{Y}_i, y)}{h_n}\right)$$

où K est un noyau ayant pour support $[0; 1]$, h_n est un paramètre de lissage, et d est une semi-métrique définie sur \mathcal{E} . L'utilisation d'une semi-métrique apporte plus de flexibilité à la méthode d'estimation considérée. Cependant, celle-ci doit être choisie de manière appropriée pour prendre en compte la nature des données. D'autre part, la constante de renormalisation $R_y(h, d, \mu)$, dont l'expression théorique est connue, est cependant assez difficile à évaluer à partir des données.

4 Segmentation d'image hyperspectrale

Nous présentons à présent des résultats obtenus en combinant l'approche par maximum a posteriori et l'estimation à noyau fonctionnel des densités ψ_j correspondant à chacune des régions. Nous utilisons le même paramètre de lissage pour toutes les régions, ce qui permet d'évacuer les termes faisant intervenir $R_{y_s}(h, d, \mu)$ (ceci n'est bien entendu pas raisonnable si les régions sont de tailles très différentes). Cela nous amène donc à rechercher la configuration x qui minimise

$$U_S(x|y) = - \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{s, x_s=j} \ln \left(\frac{1}{\#\{t, x_t=j\}} \sum_{t, x_t=j} K \left(\frac{d(y_t, y_s)}{h} \right) \right) - B \sum_{s \in S} x_s + \beta \sum_{c=\{s,t\} \in C} 1_{\{x_s \neq x_t\}}.$$

Nous utilisons l'algorithme de type I.C.M. présenté en Section 2, et un algorithme de type k -means pour l'étape d'initialisation. Les simulations réalisées mettent en évidence de bons résultats et une bonne robustesse de la démarche proposée par rapport à l'initialisation - même lorsque les densités sont initialisées à partir de 5 pixels appartenant à la même région et que x_0 est généré aléatoirement (voir Fig 2). Une vignette de l'image représentant des tranches de citrons est ensuite segmentée à partir des dérivées des courbes de réflectance (voir Fig. 3).

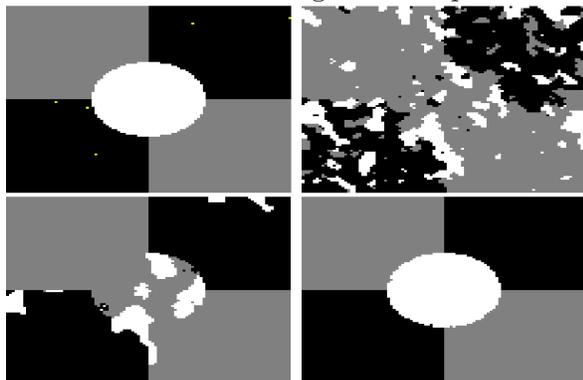


Fig. 2 a) Régions simulées et points d'initialisation (en jaune), b) x^2 , c) x^6 et d) x^{25} ($h = 0.15$, $B = 0$ et $\beta = 0.3$).

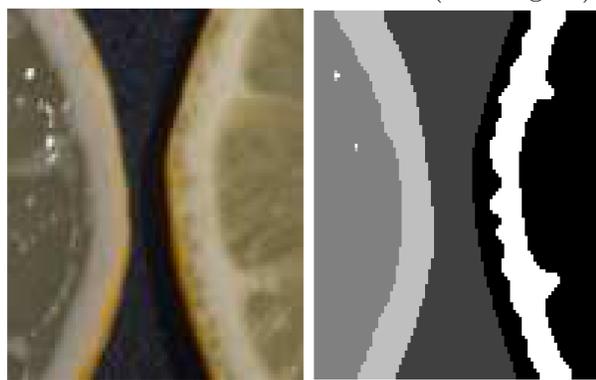


Fig. 3. Image originale et segmentation hyperspectrale obtenue à partir des distance \mathbb{L}^2 entre les dérivées ($h = 20000$, $B = 0$ et $\beta = 30$).

Bibliographie

- [1] Aubert, G. et Kornprobst, P. (2006) *Mathematical Problems in Image Processing*, Applied Mathematical Science, 147, Springer.
- [2] Besag, J. (1989) Digital image processing: Towards Bayesian image analysis. *Journal of Applied Statistics* 16 (3), 395-407.
- [3] Dabo-Niang, S. (2002) *Sur l'estimation de la densité dans un espace de dimension infinie: application aux diffusions*. Thèse de doctorat, Paris VI.
- [4] Ferraty, F. et Romain, Y. *Oxford Handbook of Functional Data Analysis* [Eds.] Oxford Univ. Press.
- [5] Ferraty, F. et Vieu, P. (2000) Dimension fractale et estimation de la régression dans des espaces vectoriels semi-normés. *Compte Rendus de l'Académie des Sciences Paris*, 330, 403-406.
- [6] Ferraty, F. et Vieu, P. (2006) *Nonparametric Functional Data Analysis: Theory and Practice*. Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York.
- [7] Maître, H. (2003) *Le traitement des images*. Hermès, Lavoisier.
- [8] Mumford, D. et Sha, J. (1989) Optimal Approximations by Piecewise Smooth Functions and Associated Variational Problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XLII (5): 577-685.